Ex.16 设矩阵A 和B 满足$AB = A + 2B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

求矩阵B.

解. 由$AB = A + 2B$ 得$(A - 2E)B = A$, 又

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$|A - 2E| = -2 + 6 + 0 - 3 - 0 - 2 = -1$, 所以, 矩阵$A - 2E$ 可逆, 从而,

$$B = (A - 2E)^{-1}A.$$

方法一. 先求$(A - 2E)^{-1}$, 再求两个矩阵的乘积.

方法二. 利用

$$(X \vdots A) \Longrightarrow (E \vdots X^{-1}A).$$